2019
UDGAVE

SOSmatematik

BEVISSAMLING TIL MUNDTLIG EKSAMEN

A-NIVEAU
STX
GAMMEL ORDNING

WWW.SOSMATEMATIK.DK

Oversigt

Denne samling indeholder mundtlige dispositioner til følgende emner:

1. Ligningsløsning
2. Kvadratsætninger
3. Andengradsligningen
4. Parabler og toppunktsformel
5. Polynomiers grad, rødder og faktorisering
6. Funktioner generelt
7. Lineære funktioner
8. Eksponentielle udviklinger
9. Fordoblingskonstant og halveringskonstant
10. Potensfunktioner
11. Differentialkvotient og tretrinsreglen
12. Differentiation af elementære funktioner
13. Regneregler for differentialkvotienter
14. Tangentligning
15. Monotoniforhold
16. Optimering
17. Enhedscirklen, sinus, cosinus, tangens i retvinklede trekanter
18. Sinusrelationerne og arealformel
19. Cosinusrelationerne
20. Den naturlige eksponentialfunktion og den naturlige logaritme
21. Stamfunktion og ubestemt integral
22. Bestemt integral
23. Arealfunktionen og bestemt integral
24. Statistik og ikke-grupperede observationer
25. Statistik og grupperede observationer
26. Chi i anden GOF-test
27. Chi i anden U-test
28. Integration ved substitution
29. Simple differentialligninger
30. Panserformlen
31. Logistisk differentialligning
32. Skalarprodukt og anvendelser i planen
33. Skalarprodukt, krydsprodukt og anvendelser i rummet
34. Parameterfremstilling af linje i rummet, skæring og afstand fra punkt til plan

Simple differentialligninger

Spørgsmål
Gennemgå de simple differentialligninger $y' = k \cdot y$ og $y' = b - ay$ og udled deres fuldstændige løsninger.

Tid
Ca. 10 min

Gennemgang
Vi starter med at se på følgende:

$$y' = k \cdot y$$

Den fuldstændige løsning er givet ved

$$f(x) = c \cdot e^{kx}$$

Bevis
Først viser vi, at der rent faktisk er tale om en løsning:

Først udregnes venstre side i differentialligningen:
$y' = f'(x) = c \cdot e^{kx} \cdot k$

Og så udregnes højre side:

$$k \cdot y = k \cdot f(x) = k \cdot c \cdot e^{kx}.$$

Da venstre side er lige med højre side, er f løsning.

Herefter viser vi, at der er tale om den fuldstændige løsning. Med andre, ord, at hvis en funktion f er løsning til differentialligningern $y' = k \cdot y$, så er funktionen på formen
$f(x) = c \cdot e^{kx}$.

Hvis f løser differentialligningen, så vil

$$f'(x) = k \cdot f(x).$$

Betragt nu hjælpefunktionen h givet ved

$$h(x) = f(x) \cdot e^{-kx}.$$

Differentieres denne, fås

$$h'(x) = f'(x) \cdot e^{-kx} + f(x) \cdot e^{-kx} \cdot (-k)$$

Indsæt nu antagelsen om, at $f'(x) = k \cdot f(x)$:

$$h'(x) = k \cdot f(x) \cdot e^{-kx} + f(x) \cdot e^{-kx} \cdot (-k)$$

$$h'(x) = k \cdot f(x) \cdot e^{-kx} - k \cdot f(x) \cdot e^{-kx}$$

$$h'(x) = 0$$

Siden h differentieret giver 0, må h være konstant:

$h(x) = c$

Vi indsætter forskriften for h:

$f(x) \cdot e^{-kx} = c$

og ganger på begge sider med e^{kx}

$f(x) = c \cdot e^{kx}$.

Og beviset er færdigt.

Lineær differentialligning
Vi går nu videre til ligningen

$y' + ay = b$

Her er den fuldstændige løsning givet ved

$$f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Bevis
Først ses det, at vi virkelig har en løsning:

$$y' + ay = c \cdot e^{-ax} \cdot (-a) + a \cdot \left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax} \right) = -a \cdot ce^{-ax} + b + a \cdot ce^{-ax} = b$$

Herefter skal vi argumentere for, at f er den fuldstændige løsning. Antag først at f opfylder differentialligningen:

$f'(x) + a \cdot f(x) = b$

$f'(x) = b - a \cdot f(x)$

a sættes uden for parentes:

$$f'(x) = a\left(\frac{b}{a} - f(x) \right)$$

$$f'(x) = -a\left(f(x) - \frac{b}{a} \right)$$

Med andre ord:

$f'(x) = -a \cdot g(x)$

Hvor $g(x) = f(x) - \frac{b}{a}$

Bemærk nu at

$g'(x) = f'(x)$

Og det betyder, at vi har

$$g'(x) = -a \cdot g(x)$$

Funktionen g er altså løsning til den simple differentialligning ovenfor. Dvs.

$$g(x) = c \cdot e^{-ax}$$

Vi indsætter nu forskriften for g

$$f(x) - \frac{b}{a} = c \cdot e^{-ax}$$

og isolerer $f(x)$:

$$f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Og beviset er færdigt.