Kogebog til Maple

STX A-niveau (gammel ordning)

Vejledning

Kogebogen indeholder vejledende eksamensopgaver samt udførlige løsninger gennemgået trin for trin. Når du arbejder med hver opgave, så læs først løsningen grundigt igennem, og prøv herefter selv at løse opgaven. Opgaverne er nøje udvalgt, så du får trænet størstedelen af de opgavetyper, du kan møde i anden delprøve med hjælpemidler.

Hvert afsnit indeholder desuden en kort introduktion og små tips til opgavetypen.

Gode råd til Maple

1. Start altid hver opgave med *restart* og $with(Gym)$. Dette vil nulstille Maple samt indlæse Gympakken, der indeholder kommandoerne til gymnasiematematik.
2. Benyt punktum (.) og ikke komma (,) når du skriver decimaltal.
3. Tryk på alt+Enter for at vise Maples udregning i samme linje.
4. Skift mellem tekst og matematik med F5.
5. Skriv gangetegn mellem bogstaver.
6. Sørg for at markere dit svar tydeligt, f.eks. med en overstregningsfarve.
7. Husk at gemme dit dokument løbende under nye filnavne, f.eks. "Eksamen 9.15", "Eksamen 9.30" osv. På den måde kan du åbne et tidligere gemt dokument, hvis der pludselig er noget, der går galt. Hvis Maple går ned, er der gode chancer for at genskabe mistet arbejde ved at gå til menuen File og vælge Recent Documents → Restore Backup.

God fornøjelse!

Lineær regression

Eksponentiel regression

Potensregression

Matematisk model

Om opgavetypen

I denne opgave får du givet forskriften for en funktion, som du så skal arbejde med. Du kan blive bedt om at tegne grafen, udregne funktionsværdier, og finde maksimum og minimum.

Det er også almindeligt, at man skal finde væksthastigheden $f'(x)$ i et bestemt punkt og komme med en fortolkning.

Opgave 13 (24. maj 2016)

Foto: www.colourbox.dk

I en model kan temperaturen et bestemt sommerdøgn et bestemt sted beskrives ved

$$f(t) = 20 - 5\cdot\left(\sin(0,262\cdot t) + \cos(0,262\cdot t)\right),\quad 0 \le t \le 24,$$

hvor $f(t)$ betegner temperaturen (målt i $^\circ\mathrm{C}$) til tidspunktet t (målt i timer efter midnat).

a) Tegn grafen for f, og benyt modellen til at bestemme den højeste og den laveste temperatur dette sommerdøgn.

b) Bestem $f'(8)$, og forklar betydningen af dette tal.

a)

restart :

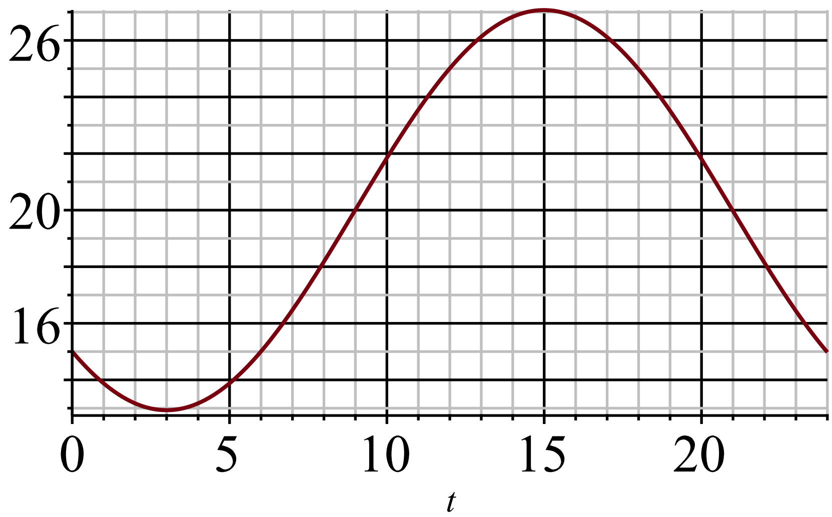
$with(Gym)$:

Vi starter med at definere funktionen i Maple:

$f(t) := 20 - 5\cdot(\sin(0.262\cdot t) + \cos(0.262\cdot t))$:

Vi kan nu tegne grafen vha. kommandoen plot. Bemærk, at t skal ligge mellem 0 og 24. Der er desuden tilføjet gitterlinjer.

$plot(f(t), t = 0\,..24)$



For at finde højeste og laveste temperatur, benyttes "maximize" og "minimize":

$maximize(f(t), t = 0\,..24, location = true)$

$$27.07106781, \{[\{t = 14.98851457\}, 27.07106781]\} \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

$minimize(f(t), t = 0\,..24, location = true)$

$$12.92893219, \{[\{t = 2.997702914\}, 12.92893219]\} \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

Vi kan altså se, at

Den højeste temperatur er ca. 27°C og den laveste temperatur er ca. 13°C.

b)

$f'(8)$ bestemmes meget nemt, fordi vi har gemt fuktionen i Maple:

$f'(8) = 1.790260511$

Tallet $f'(8) = 1.79$ er væksthastigheden til tiden $t = 8$. Du kan derfor konkludere følgende (husk at bruge de rigtige enheder som her er °C og timer):

Til tidspunktet $t = 8$ (altså 8 timer efter midnat) , stiger temperaturen med ca. 1.79°C i timen

Trigonometrisk funktion

Trekantsberegning

Tangentligning

Monotoniforhold

Om opgavetypen

At finde monotoniforholdene for en funktion vil sige at bestemme, i hvilke intervaller funktionen er voksende, og i hvilke den er aftagende.
Dette er en standard-opgave, som optræder i stort set alle eksamenssæt.

Du kan genkende opgavetypen ved, at der enten står "bestem monotoniforholdene" eller "argumenter for grafens forløb".

Opgavetypen ses ofte i kombination med foregående opgavetype (tagentligning).

Opgave 8 (15. august 2016)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16 .$$

a) Bestem nulpunkterne for f.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

a)

restart :
with(*Gym*) :

Dette er blot et lille "opvarmningsspørgsmål", hvor vi skal finde funktionens nulpunkter, altså de x-værdier, som får $f(x)$ til at blive 0.
Vi definerer funktionen i Maple og benytter solve:

$f(x) := x^3 - 7x^2 + 8x + 16 :$

$solve(f(x) = 0)$

$$-1, 4, 4 \tag{8.2.1}$$

Funktionen f har altså nulpunkterne $x = -1$ og $x = 4$.

b)

For at bestemme monotoniforholdene, skal vi først finde nulpunkterne for differentialkvotienten, dvs. de x-værdier, der får $f'(x)$ til at blive 0:

$solve(f'(x) = 0)$

$$4, \frac{2}{3} \tag{8.3.1}$$

Altså $x = \frac{2}{3}$ og $x = 4$. Herefter skal fortegnet for $f'(x)$ undersøges for nogle x-værdier, som ligger imellem og på hver side af disse nulpunkter. Vælg f.eks. 0, 1, og 5 og udregn $f'(x)$ for disse værdier:

$f'(0) = 8$ (Fortegnet er +)
$f'(1) = -3$ (Fortegnet er −)
$f'(5) = 13$ (Fortegnet er +)

De fundne oplysninger skrives nu i et monotoniskema. Bemærk, at når $f'(x)$ er positiv, så er f voksende. Omvendt er f aftagende, når $f'(x)$ er negativ. Det illustreres med pile som vist.

x		$\frac{2}{3}$		4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Til sidst skal der skrives en konklusion. Dette gøres ved at angive, i hvilke intervaller f er voksende henholdsvis aftagende. Læg godt mærke til, at de kantede parenteser vender væk fra ∞ og ind mod tallene. Tegnet ∞ findes i værktøjskassen "Common Symbols".

f er voksende i $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$ og $[4, \infty[$.
f er aftagende i $\left[\frac{2}{3}, 4\right]$.

Røringspunkt til tangent med en given hældning

Optimering

Stamfunktion gennem et punkt

Areal under graf og volumen af omdrejningslegeme

Areal mellem grafer

Kvartilsæt og boksplot

Sumkurve og kvartilsæt

Chi i anden uafhængighedstest (U-test)

Chi i anden goodness of fit-test (GOF-test)

Om opgavetypen

Dette er den anden af de to opgavetyper med Chi i anden-test.

Her bliver du præsenteret for en række observationer, som fordeler sig i bestemte kategorier. Samtidig vil der i opgaveteksten være oplysninger, som kan bruges til at beregne en forventet fordeling.

Nulhypotesen er altid, at den observerede fordeling følger den forventede, og testes vha. et goodness of fit-test.

Opgave 12 (22. maj 2015)

I forbindelse med en forbrugerundersøgelse i en bestemt population vil man undersøge, om en tilfældig stikprøve på 300 forbrugere er repræsentativ med hensyn til alder. Nulhypotesen er derfor:

Aldersfordelingen i stikprøven følger aldersfordelingen i populationen.

I stikprøven er aldersfordelingen som vist i nedenstående tabel.

Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal	39	42	83	54	49	21	12

Aldersfordelingen i populationen er vist i nedenstående tabel.

Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal i %	15	16	19	17	17	10	6

a) Afgør, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

b) Angiv teststørrelsen, og redegør for, hvilken af aldersgrupperne der giver det største bidrag til teststørrelsen.

a)

restart :
with(*Gym*) :

Vi skal først bestemme de forventede værdier, når nulhypotesen er sand, dvs. når aldersfordelingen i stikprøven følger aldersfordelingen i populationen.
Dette gøres ved at udregne de oplyste procentdele af de 300 forbrugere. Altså $0.15\cdot 300$, $0.16\cdot 300$, $0.19\cdot 300$ osv. Dette kan gøres i et hug, samtidigt med at vi gemmer de forventede værdier i en liste:

$$forv := [0.15, 0.16, 0.19, 0.17, 0.17, 0.1, 0.06]\cdot 300$$

$$[45.00, 48.00, 57.00, 51.00, 51.00, 30.0, 18.00] \qquad \textbf{(17.2.1)}$$

Herefter gemmer vi de observerede værdier i en liste:

$$obs := [39, 42, 83, 54, 49, 21, 12]$$

$$[39, 42, 83, 54, 49, 21, 12] \qquad \textbf{(17.2.2)}$$

Hvis de forventede værdier skal angives som svar (dette er dog ikke tilfældet her), indsættes en tabel:

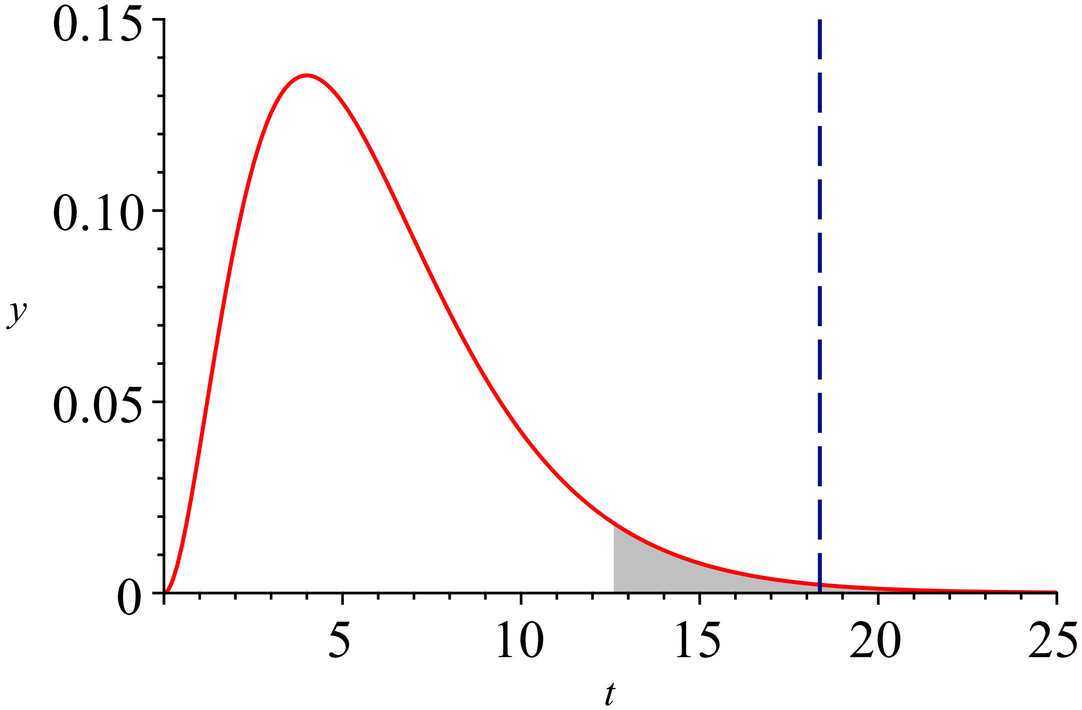
Det forventede værdier er altså

Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal	45	48	57	51	51	30	18

For at afgøre, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau, udfører vi et goodness of fit-test vha. kommandoen "ChiKvadratGOFtest":

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 18.365
Frihedsgrader = 6
Kritisk værdi = 12.592
p-værdi = 0.0053829



Nulhypotesen kan forkastes, da teststørrelsen (18.365) overstiger den kritiske værdi (12.592).

b)
Et lidt atypisk spørgsmål, hvor du skal redegøre for, hvordan teststørrelsen er fremkommet. Bemærk, at Maple gav os teststørrelsen 18.365 ovenfor.

Dette tal udregnes ved formlen

$$\frac{(F_1 - O_1)^2}{F_1} + \frac{(F_2 - O_2)^2}{F_2} + \frac{(F_3 - O_3)^2}{F_3} + \ldots$$

Hvor bogstavet F betegner en forventet værdi, og O betegner en observeret værdi.
I vores tilfælde har vi

$forv = [45.00, 48.00, 57.00, 51.00, 51.00, 30.0, 18.00]$
$obs = [39, 42, 83, 54, 49, 21, 12]$

Så vi får:

$$\frac{(45-39)^2}{45} + \frac{(48-42)^2}{48} + \frac{(57-83)^2}{57} + \frac{(51-54)^2}{51} + \frac{(51-49)^2}{51} + \frac{(30-21)^2}{30} + \frac{(18-12)^2}{18.}$$
$$= 18.36455108$$

Der er 7 led i denne sum, og vi skal blot se, hvilket af leddene, der er størst. Dette kan f.eks. gøres sådan:

$$\frac{(45-39)^2}{45.} = 0.8000000000$$
$$\frac{(48-42)^2}{48.} = 0.7500000000$$
$$\frac{(57-83)^2}{57.} = 11.85964912$$
$$\frac{(51-54)^2}{51.} = 0.1764705882$$
$$\frac{(51-49)^2}{51.} = 0.07843137255$$
$$\frac{(30-21)^2}{30.} = 2.700000000$$
$$\frac{(18-12)^2}{18.} = 2.000000000$$

Det ses, at led nr. 3 klart er det største, så aldersgruppen 40-49 har altså bidraget mest til teststørrelsen.

Løsning af differentialligning

Vektorer og linjer i 2D

Skæring mellem cirkel og linje, tangent til cirkel

Vektorer og linjer i 3D

Tangentplan til kugle, skæring mellem linje og kugle

Opgave i rumgeometri