Kogebog til opgaver uden hjælpemidler

STX A-niveau (gammel ordning)

Vejledning

Kogebogen indeholder vejledende eksamensopgaver samt udførlige løsninger gennemgået trin for trin. Når du arbejder med hver opgave, så læs først løsningen grundigt igennem, og prøv herefter selv at løse opgaven med papir og blyant. Opgaverne er nøje udvalgt, så du får trænet størstedelen af de opgavetyper, du kan møde i første delprøve uden hjælpemidler.

5 gode råd til eksamen

1. Skriv altid en kort, forklarende tekst om, hvad du foretager dig i hvert trin.
2. Det er vigtigt at markere svaret på hvert spørgsmål tydeligt, f.eks. med dobbelt understregning.
3. Du behøver ikke bruge tid på at skrive selve opgaveteksten igen.
4. Husk at en delopgave kan indeholde flere spørgsmål, der skal besvares.
5. Skriv med blyant.

Indholdsfortegnelse

Kogebogen indeholder en interaktiv indholdsfortegnelse, hvor du hurtigt kan klikke dig videre til det ønskede emne. For at se indholdsfortegnelsen, skal du indstille din pdf-fremviser til at vise bogmærker. På en Mac gøres dette ved at klikke på  og herefter vælge "Bogmærker". Hvis du bruger Windows og Adobe Reader, kan du få bogmærkerne frem ved at klikke på .

God fornøjelse!

Grundlæggende

▶ Reducering af udtryk

▶ Løs ligningen

▼ Løs andengradsligningen

Opgave

a) Løs andengradsligningen

$$3x^2 - 18x + 15 = 0.$$

Løsning

Først bemærker vi, at ligningen kan divideres igennem med 3:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

Vi aflæser nu a, b og c:

$a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.

Herefter udregnes diskriminanten, d:

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 \\ &= 36 - 20 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Herefter kan x findes vha. diskriminantformlen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Den første løsning fås ved at benytte + og den anden ved at benytte −:

$$x = \frac{6+4}{2} = 5$$
$$x = \frac{6-4}{2} = 1$$

Altså har ligningen de to løsninger $x = 5$ og $x = 1$.

Opgave

a) Bestem tallet k, så andengradsligningen

$$2x^2 - 3x + k = 0$$

har netop én løsning.

Løsning
Vi starter med at opskrive a, b og c :

$a = 2,\ b = -3,\ c = k$

Hvis en andengradsligning skal have netop én løsning, så skal diskriminanten være lig med 0:

$d = 0$

$b^2 - 4\,ac = 0$

$(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0$

Vi kan nu isolere k i denne ligning:

$9 - 8\,k = 0$
$9 = 8\,k$
$\frac{9}{8} = k$

Altså vi andengradsligningen med $k = \frac{9}{8}$ have netop én løsning.

▶ **To ligninger med to ubekendte**

Trekanter

▶ **Pythagoras**

▶ **Ensvinklede trekanter**

Funktioner og vækstmodeller

▶ **Find forskrift for funktion gennem 2 punkter**

▶ **Hvilken graf hører til hvilken funktion?**

▶ **Opstil en forskrift ud fra en sproglig beskrivelse**

▶ **Fordoblingskonstant**

▶ **Fortolk konstanterne i modellen**

▶ **Find væksthastighed grafisk**

Andengradspolynomier

▶ **Toppunkt**

▶ **Rødder**

▶ **Bestem fortegnet for *a*, *b*, *c* og *d***

▶ **Bestem forskrift når skæring med akser er oplyst**

Differentialregning

▶ **Bestem $f\,'(x)$**

▶ **Tangentligning**

▶ **Monotoniforhold**

▶ **Optimering**

Vektorer

▶ **Ligning med vektor**

▼ **Bestem *t***

Opgave

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestem tallet t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Løsning

Hvis vektorerne skal være vinkelrette (ortogonale), skal skalarproduktet være lig med 0:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2\,t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\,t-1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Vi udregner skalarproduktet og løser den ligning, der fremkommer:

$1 \cdot (5\,t-1) + (-2\,t) \cdot 3 = 0$

$5\,t - 1 - 6\,t = 0$

$-t - 1 = 0$

$t = -1$

Opgave

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 6 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

a) Bestem t, så $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 30$.

Løsning

Vi udregner først determinanten:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 7 & t \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 6 - 3 \cdot t = -3\,t + 42$$

Herefter sættes determinanten lig med 30, og vi løser den ligning der fremkommer:

$-3\,t + 42 = 30$

$42 - 30 = 3\,t$

$12 = 3\,t$

$t = 4$

Areal af parallelogram

Plangeometri

Parameterfremstilling for linje

Opgave

Linjen l går gennem punkterne $A(1,3)$ og $B(4,6)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for l.

Løsning
For at finde en parameterfremstilling for linjen, skal vi benytte et punkt på linjen samt en retningsvektor.
Som punktet vælger vi f.eks. $A(1,3)$ og som retningsvektor benytter vi vektoren $\overrightarrow{AB}$ som går fra A til B og derfor netop har samme retning som linjen:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi indsætter nu denne normalvektor sammen med punktet $A(1,3)$ i linjens parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ligning for linje

Find centrum og radius

Opskriv ligning for cirkel

Integralregning

Stamfunktion gennem punkt

Opgave

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 + 3.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(2,10)$.

Løsning
Først findes samtlige stamfunktioner:

$$F(x) = 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 3x + k$$

hvilket kan reduceres til

$$F(x) = 2x^3 + 3x + k$$

For at bestemme tallet k indsætter vi nu punktet $(2, 10)$:

$$10 = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 + k$$

Vi kan nu reducere ligningen og isolere k

$$10 = 2 \cdot 8 + 6 + k$$
$$10 = 16 + 6 + k$$
$$k = 10 - 16 - 6$$
$$k = -12$$

Den færdige stamfunktion bliver således

$$F(x) = 2\,x^3 + 3\,x - 12$$

Undersøg, om f er stamfunktion til g

Areal under graf (bestemt integral)

Integration ved substitution

Differentialligninger

Undersøg om f er løsning til differentialligning

Bestem tangentligning vha. differentialligning